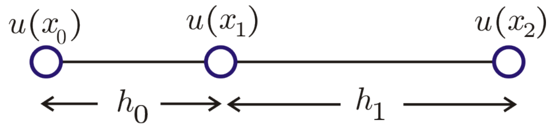
Construcción de FDF (Fórmulas en Diferencias Finitas)

1) Dada las evaluaciones funcionales $u(x_0)$, $u(x_1)$, $u(x_2)$ con $h_0 = x_1 - x_0$ $h_1 = x_2 - x_1$, Construya la FDF para aproximar $u''(x_1)$.

Pasos 1. Expansiones de Taylor: Al rededor de x_1



- Para x_0:

$$u(x_0) = u(x_1) + (x_0 - x_1)u'(x_1) + \frac{(x_0 - x_1)^2}{2}u''(x_1) + \frac{(x_0 - x_1)^3}{3!}u'''(x_1) + \frac{(x_0 - x_1)^4}{4!}u^{iv}(x_1) + \cdots$$

es decir,

$$u(x_0) = u(x_1) - h_0 u'(x_1) + \frac{h_0^2}{2}u''(x_1) + \frac{h_0^3}{3!}u'''(x_1) + \frac{h_0^4}{4!}u^{iv}(x_1) + \cdots \tag{1}$$

- Para x_2:

$$u(x_2) = u(x_1) + h_1 u'(x_1) + \frac{h_1^2}{2}u''(x_1) + \frac{h_1^3}{3!}u'''(x_1) + \frac{h_1^4}{4!}u^{iv}(x_1) + \cdots \tag{2}$$

Paso 2. Combinar linealmente las expansiones de Taylor:

$$\boxed{h_1[\text{Ec. (1)}] + h_0[\text{Ec. (2)}]}$$

De aquí que

$$\begin{aligned} h_1 u(x_0) + h_0 u(x_2) \quad &= \quad (h_1 + h_0)u(x_1) + \left(\frac{h_1 h_0^2 + h_0 h_1^2}{2}\right)u''(x_1) + \\ &\quad + \left(\frac{-h_1 h_0^3 + h_0 h_1^3}{3!}\right)u'''(x_1) + \left(\frac{h_1 h_0^4 + h_0 h_1^4}{4!}\right)u^{iv}(x_1)u^{iv}(x_1) + \cdots \end{aligned}$$

lo que permite escribir para $u''(x_1)$:

$$\begin{aligned} u''(x_1) \quad &= \quad \left(\frac{2}{h_0^2 h_1 + h_0 h_1^2}\right)\Big\{h_1 u(x_0) - (h_0 + h_1)u(x_1) - h_0 u(x_2)\Big\} + \\ &\quad + \left(\frac{2}{h_0^2 h_1 + h_0 h_1^2}\right)\left(\frac{h_0 h_1^3 - h_0^3 h_1}{3!}\right)u'''(x_1) + \left(\frac{2}{h_0^2 h_1 + h_0 h_1^2}\right)\left(\frac{h_0^4 h_1 + h_0 h_1^4}{4!}\right) + \cdots \end{aligned}$$

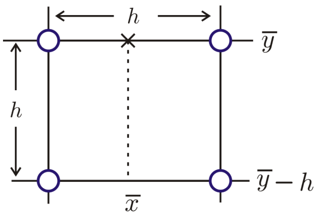
Preguntas:

a. Considere el caso de una malla uniforme: $h_0 = h_1 = h$. Verifique que el E.L.T. es $\mathcal{O}(h^2)$.

b. ¿Qué puede decir acerca del E.L.T. para los casos $h_0 \neq h_1$?

c. En el caso que $h_0 - h_1 = h$ y $u(x) = 1,\ x,\ x^2,\ x^3$. ¿Cuál sería el E.L.T.?

2) Emplee los Operadores en DF D_0 y D_- para construir una FDF para aproximar $u_{xy}(\bar{x}, \bar{y})$.



$$
\begin{aligned}
u_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) &\approx D_{0,x}\big(D_{-,y}u(\bar{x}, \bar{y})\big) \\
&\approx \frac{D_{-,y}u(\bar{x} + h/2, \bar{y}) - D_{-,y}u(x - h/2, \bar{y})}{2\left(\frac{h}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

$$
u_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) \approx \left(\frac{1}{h}\right)\left\{\frac{u(\bar{x} + h/2, \bar{y}) - u(\bar{x} + h/2, \bar{y} - h)}{h} - \frac{u(\bar{x} - h/2, \bar{y}) - u(x - h/2, \bar{y} - h)}{h}\right\}
$$

finalmente

$$
\boxed{u_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) \approx \left(\tfrac{1}{h^2}\right)\Big\{u(\bar{x} + h/2, \bar{y}) - u(x + h/2, \bar{y} - h) - u(\bar{x} - h/2, \bar{y}) + u(x - h/2, \bar{y} - h)\Big\}}
$$